

TD n°5: Le théorème des résidus

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un  sont à faire en priorité, ceux marqués d'un  sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Généralités sur les résidus



Exercice 1. Quelques calculs.

1. Démontrer que si f a un zéro d'ordre 1 en a alors

$$\operatorname{Res}_a(1/f) = \frac{1}{f'(a)}.$$

2. Calculer le résidu de $\frac{1}{z^n-1}$ en $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$.
3. Calculer le résidu de $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ en $n\pi$.
4. Démontrer que si $f \in \mathcal{M}(U)$ a un pôle d'ordre n en $a \in U$, alors

$$\operatorname{Res}_a(f) = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} ((z-a)^n f(z)) \right]_{z=a}.$$



Exercice 2. Autour des résidus.

On fixe f une fonction holomorphe au voisinage de $a \in \mathbb{C}$ et g une fonction méromorphe au voisinage de a .

1. Supposons que f ne s'annule pas et que g a un pôle d'ordre 1 en a . Démontrer

$$\operatorname{Res}_a(fg) = f(a)\operatorname{Res}_a(g).$$

2. Supposons à présent que g a un pôle d'ordre n en a , on écrit

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$$

$$g(z) = b_{-n}(z-a)^{-n} + \dots + b_{-1}(z-a)^{-1} + b_0 + \dots$$

Démontrer que

$$\operatorname{Res}_a(fg) = \sum_{i+j=-1} a_i b_j.$$

Exercice 3. Résidus de fractions rationnelles.

Soient $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ une fraction rationnelle de degré $\deg(f) \leq -2$ (où $\deg(f) = \deg(p) - \deg(q)$ si $f = p/q$).

1. Démontrer à l'aide du théorème des résidus que

$$\sum_a \operatorname{Res}_a(f) = 0.$$

2. Démontrer que si de plus $f \in \mathbb{R}(z)$ et n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}$, alors $\sum_{\Im(a)>0} \operatorname{Res}_a(f)$ est un imaginaire pur.

3. Mettre ces résultats en défaut si la condition sur $\deg(f)$ n'est pas vérifiée.

On ne suppose plus rien sur $\deg(f)$ et on définit, pour $f \in \mathbb{C}(z)$, le résidu en l'infini de f comme le résidu en $w = 0$ de $-\frac{1}{w^2} f(1/w)$.

[†]Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

4. Démontrer que $-\frac{1}{w^2}f(1/w)$ admet un zéro d'ordre $-\deg(f) - 2$ en $w = 0$ (où on considère un pôle d'ordre n comme un zéro d'ordre $-n$).
5. En intégrant $f(z)dz$ sur un cercle de rayon $R > \sup_{f(z)=\infty} |z|$, démontrer que

$$\operatorname{Res}_\infty(f) = - \sum_a \operatorname{Res}_a(f).$$

Indication : Un cercle de rayon $R \gg 1$ orienté dans le sens direct est un petit cercle de rayon $1/R \ll 1$ orienté dans le sens indirect autour de l'infini.

Exercice 4. Nombre de zéros et pôles d'une fonction rationnelle. Soit $f(z) \in \mathbb{C}(z)$. On définit, pour $a \in \mathbb{C}$ $v_a(f) = n$ si f a un zéro d'ordre n en a , $v_a(f) = -n$ si f a un pôle d'ordre n en a (en particulier, $v_a(f) = 0$ si f n'a ni zéro ni pôle en a .) On définit $v_\infty(f) = -\deg(f)$.

1. Démontrer que $v_a(f) = \operatorname{Res}_a(f'/f)$ pour tout $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
2. A l'aide de l'exercice précédent, démontrer que

$$\sum_{a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} v_a(f) = 0.$$

Autrement dit, une fonction rationnelle a toujours autant de zéros que de pôles, comptés avec multiplicités.

Calculs d'intégrales



Exercice 5. Une transformée de Fourier.

Calculer, pour $\xi \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx.$$

On pourra distinguer les cas $\xi \geq 0$ et $\xi \leq 0$.

Exercice 6. Encore une intégrale.

Soient $s \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ vérifiant $0 < \Re(s) < n$. Calculer

$$\int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n} \frac{dx}{x}$$

à l'aide du contour donné par les segments $[0, R]$ et $[Re^{2i\pi/n}, 0]$ (avec l'orientation) et l'arc de cercle $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$.

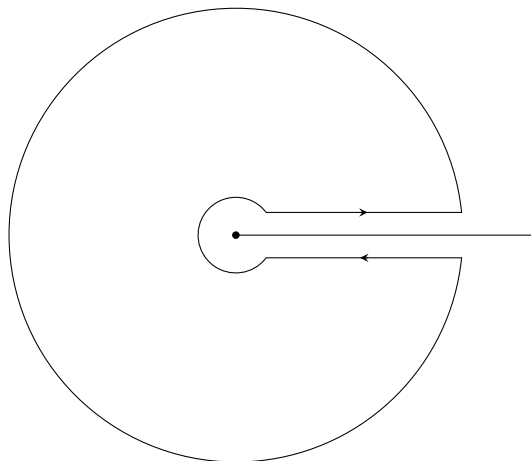


Exercice 7. Un contour différent.

Soit $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ à pôles simples, sans pôle dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, et $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $0 < \Re(s) < -\deg(f)$. Calculer

$$\int_0^\infty x^s f(x) \frac{dx}{x}$$

en fonction des $\operatorname{Res}_a(f)$ à l'aide d'un contour Pac-Man, comme ceci :



Appliquer à $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$.

Indication : on pourra définir une détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ par $L(z) := \log(-z) + i\pi$.

Exercice 8. Théorème de Von Dantzig.

1. Soit $a \in]0, 1[$. Démontrer à l'aide du théorème des résidus que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} \frac{\sin(\pi a)}{\cosh(\pi x) + \cos(\pi a)} dx = \frac{2 \sinh(2\pi a\xi)}{\sinh(2\pi\xi)}.$$

2. En déduire que $\frac{1}{\cosh(\pi x)}$ est sa propre transformée de Fourier.

Calculs de sommes



Exercice 9. Les valeurs de ζ aux entiers pairs.

On considère la fonction méromorphe

$$f(z) = \frac{2i\pi}{z^{2k}(e^{2i\pi z} - 1)}.$$

Pour $\Re(s) > 1$, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Démontrer que $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ est développable en série entière au voisinage de 0, et que les coefficients du développement sont rationnels. On appelle ces coefficients renormalisés par $n!$ les nombres de Bernoulli, et on note

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

2. Démontrer que f a un pôle simple en chaque entier non-nul et calculer le résidu.
3. Démontrer que f a un pôle d'ordre $2k + 1$ en 0, de résidu $\frac{(2i\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!}$.
4. En intégrant f sur le carré C_N de coins $\pm(N + 1/2) \pm (N + 1/2)i$, démontrer que

$$\zeta(2k) = -\frac{(2i\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}.$$

Exercice 10. Une somme de cotangentes hyperboliques.

On pose, pour $k \geq 0$ entier :

$$S_k = \sum_{n \geq 1} \frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}}, \quad T_k = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{4k+3}(e^{2\pi n} - 1)}.$$

1. Démontrer que $S_k = 2T_k + \zeta(4k + 3)$.
2. Démontrer qu'au voisinage de 0, on a

$$z \coth(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

3. On pose $f(z) = \frac{\cot(\pi z) \coth(\pi z)}{z^{4k+3}}$. Déterminer ses pôles, leurs ordres et leurs résidus.
4. Démontrer, grâce à une méthode similaire à l'exercice précédent, la formule

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{2k+2} (-1)^{m+1} \zeta(2m) \zeta(4k + 4 - 2m)$$

où on normalise $\zeta(0) = -\frac{B_0}{2} = -\frac{1}{2}$. En déduire la valeur de T_k . On obtient donc une formule de la forme $\zeta(4k + 3) = c_k \pi^{4k+3} + 2T_{4k+3}$, avec c_k un nombre rationnel explicite : à condition de savoir calculer π , c'est une série qui converge beaucoup plus vite vers $\zeta(4k + 3)$!

 Exercice 11. Séries de Fourier de formes modulaires.

On définit, pour $\Im(\tau) > 0$:

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}}.$$

On considère, pour $\Im(w) > 0$, la fonction méromorphe

$$f_w(z) = \frac{2i\pi}{(z - w)^{2k}(e^{2i\pi z} - 1)}.$$

1. Déterminer les résidus de f_w en chaque $m \in \mathbb{Z}$.
2. Démontrer que le résidu de f_w en w est donné par

$$\text{Res}_w(f_w) = -\frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{d \geq 1} d^{2k-1} e^{2i\pi dw}.$$

3. En intégrant f_w sur le carré de coins $\pm(N+1/2) \pm (N+1/2)i$, démontrer que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m - w)^{2k}} = \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{d \geq 1} d^{2k-1} e^{2i\pi dw}$$

On note $\sigma_k(r) := \sum_{d|r} d^k$.

4. Démontrer, pour $\Im(\tau) > 0$:

$$\sum_{n \neq 0, m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}} = 2 \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{r \geq 1} \sigma_{2k-1}(r) q^r$$

où $q = e^{2i\pi\tau}$.

5. En utilisant le résultat de l'exercice 9, démontrer que

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) \left(1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{r \geq 1} \sigma_{2k-1}(r) q^r \right).$$

6. Démontrer que $G_{2k}(-\frac{1}{\tau}) = \tau^{2k} G_{2k}(\tau)$, et en déduire que $G_{4k+2}(i) = 0$.

7. Démontrer que

$$\sum_{r \geq 1} \sigma_{2k-1}(r) q^r = \sum_{n \geq 1} \frac{n^{2k-1} q^n}{1 - q^n}$$

et en déduire que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^{4k+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{B_{4k+2}}{8k+4}.$$